

2018年

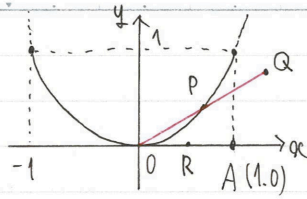
東大文系数学

第4問

(1) $P(p, p^2)$ とおく
但し $-1 \leq p \leq 1$

$$\vec{OQ} = 2\vec{OP}$$

$$= (2p, 2p^2)$$



$$\vec{OQ} = (x, y) \text{ とおく}$$

$$\begin{cases} x = 2p \\ y = 2p^2 \end{cases} \quad \text{1) } x, y \text{ を消去して}$$

$$y = 2p^2 = 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}x^2$$

$$-1 \leq p \leq 1 \text{ より } -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

よって点Qの軌跡は

$$y = \frac{1}{2}x^2 \text{ 上の } -2 \leq x \leq 2 \text{ の部分}$$

(2) $R(t, 0)$ とおく 但し $0 \leq t \leq 1$

$$\vec{OP} = 2\vec{OP} + \vec{OR}$$

$$= \vec{OQ} + \vec{OR}$$

QとRはそれぞれ独立

に動く

⇒ 図形を四角と見て動く

よって点Pは (1) の点Qを \vec{OR} の方向に
移動させたものとなる。

長方形の一部 \vec{OQ} の軌跡

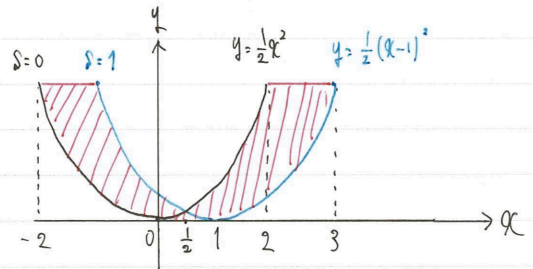
つまり (1) で求めた軌跡を

x軸方向に0から1動かしたときの

通過領域である。

直線の一部

\vec{OR} の軌跡



この面積は

$x = \frac{1}{2}$ で線対称なため

$$2 \times \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2}x^2 dx + 1 \times 2 - \int_1^3 \frac{1}{2}(x-1)^2 dx \right\}$$

$$= 2 \times \left\{ \left[\frac{1}{6}x^3 \right]_{\frac{1}{2}}^2 + 2 - \left[\frac{1}{6}(x-1)^3 \right]_1^3 \right\}$$

$$= 2 \left\{ \frac{4}{3} - \frac{1}{48} + 2 - \left(\frac{4}{3} - 0 \right) \right\}$$

$$= \frac{95}{24}$$